CONCOURS D'ADMISSION DE 1997

ESSEC

OPTION ECONOMIQUE

Mathématiques III

Vendredi 25 Avril 1997 de 8h à 12h

Problème 1

L'objet de ce problème est l'étude des jets d'un dé, puis d'un ensemble de n dés.

1°) Calcul de sommes de séries.

On considère dans cette question un nombre entier $n \geq 1$ et la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

a) Calculer $(1-x)S_n(x)$ et en déduire une expression de $S_n(x)$.

En déduire, pour $0 \leq x < 1$, la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

b) Dériver $S_n(x)$ et déterminer la limite de la suite (nx^n) quand n tend vers $+\infty$.

En déduire, pour $0 \leq x < 1$, la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$.

2°) Etude du jet d'un dé équilibré à 6 faces.

On lance indéfiniment un dé équilibré et l'on désigne par T la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, le dé donne l'as.

a) Déterminer pour tout entier $k \geq 1$ les probabilités des événements $T = k$, $T \leq k$.

b) En déduire l'espérance E(T) de la variable aléatoire T.

3°) Etude du jet de n dés équilibrés à 6 faces.

On considère le jeu suivant: on lance indéfiniment un ensemble de n dés équilibrés, numérotés 1, 2, ... , n (où le nombre entier n est supérieur ou égal à 1). Autrement dit, on lance une première fois les n dés, puis on relance une seconde fois ces n dés, et ainsi de suite. On désigne par:

- N la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, chacun des n dés a amené au moins une fois l'as.
- T_j la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, le $j^{ième}$ dé a amené l'as $(1 \leq j \leq n)$.

Dans la suite de la question, on note k un nombre entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer la probabilité P(N = 1).
b) Comparer les événements $(N \leq k)$ et $(T_1 \leq k) \cap (T_2 \leq k) \cap \ldots \cap (T_n \leq k)$.
En déduire les probabilités $P(N \leq 2)$ et $P(N = 2)$, puis, plus généralement, $P(N \leq k)$ et $P(N = k)$.
c) Dans cette question, on suppose que n = 2. Vérifier alors que:

$$P(N=k) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \frac{11}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}.$$

En déduire, sous forme de fraction irréductible, l'espérance E(N) de N.
d) Dans cette question, on suppose que n = 3. Déterminer de même E(N).
e) On revient au cas général où l'entier n est supérieur ou égal à 1, et l'on s'intéresse à la médiane de la variable aléatoire N.
- Etablir pour tout nombre réel x l'inégalité $1 - e^{-x} \leq x$.
- En déduire que l'inégalité $P(N \leq k) \geq 0.5$ implique l'inégalité:

$$k \geq \frac{\ln(n)-\ln(\ln(2))}{\ln(6)-\ln(5)} = 5,48\ldots \ln(n)+2,01\ldots.$$

- En déduire un nombre entier naturel auquel k est supérieur ou égal dans chacun des trois cas n = 10, n = 50, n = 100.

f) Ecrire un algorithme (en PASCAL) permettant le calcul successif des 30 premiers termes de la suite $k \to P(N \leq k)$ lorsque l'entier n est donné.
Déterminer à l'aide de cet algorithme les plus petites valeurs de l'entier k pour lesquelles on a $P(N \leq k) \geq 0.5$ lorsque n = 10, 50, 100.
Comparer ces résultats à ceux obtenus précédemment à la question (d).

Problème 2

L'objet de ce problème est l'étude des racines réelles du polynôme P_n défini pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel x par:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+ \ldots +\frac{x^n}{n!}.$$

1°) Etude de P_n pour $n \leq 3$.
Etudier les variations et tracer sur une même figure (avec pour unité: 2centimètres) les courbes représentatives des polynômes P_n pour n = 0, 1, 2, 3.

2°) Comparaison de exp(x) et $P_n(x)$.
a) Etablir que $P_n(x) \leq \exp(x)$ pour tout entier naturel n et tout réel positif x.
b) Etablir que $P_{2n+1}(x) \leq \exp(x) \leq P_{2n}(x)$ pour tout entier naturel n et tout réel négatif x *(on pourra par exemple raisonner par récurrence)*.

3°) Etude du nombre des racines réelles de P_n.

a) Déduire de la question 2 le nombre des racines et le signe de P_{2n} sur **R**.

b) Comparer la dérivée de P_{2n+1} avec P_{2n}. En déduire que le polynôme P_{2n+1} possède une racine réelle unique, et que celle-ci est strictement négative.

On note désormais x_n l'unique racine du polynôme P_{2n+1}. Ainsi $x_o = -1$.

c) Déduire des résultats précédents les variations de P_{2n} et de P_{2n+1} puis donner sur une même figure l'allure des courbes représentatives des fonctions $x \to P_{2n+1}(x)$, $x \to P_{2n}(x)$ et $x \to \exp(x)$ sur **R**.

4°) Détermination de la racine du polynôme P_3.

a) Etablir qu'un nombre réel x est racine de l'équation $P_3(x) = 0$ si et seulement si $t = x + 1$ est racine de l'équation $t^3 + 3t + 2 = 0$.

b) Etudier les variations du polynôme $P(t) = t^3 + 3t + 2$ et prouver que celui-ci admet une racine réelle et une seule que l'on convient de noter r.

- En considérant l'équation du second degré $z^2 - rz - 1 = 0$, établir l'existence de deux nombres réels u, v de somme égale à r, de produit égal à -1.
- En remarquant que $P(u+v) = 0$, déterminer la somme $u^3 + v^3$, puis écrire une équation du second degré dont les deux racines sont u^3 et v^3.
- Résoudre cette équation afin d'en déduire u^3 et v^3, puis u et v, et enfin r que l'on exprimera à l'aide des racines cubiques des nombres $\sqrt{2}-1$ et $\sqrt{2}+1$.

c) En déduire que la racine x_1 du polynôme P_3 est égale à r-1 et préciser une valeur approchée à 10^{-5} près de x_1.

5°) Etude de la suite (x_n) des racines des polynômes P_{2n+1}.

a) En groupant les termes deux par deux dans $P_{2n+1}(-2n-1)$, déterminer le signe de $P_{2n+1}(-2n-1)$ pour tout entier naturel n. En déduire que $-2n-1 \leq x_n$.

b) Etudier le signe de $P_{2n+3}(x_n) - P_{2n+1}(x_n)$. En déduire que $x_{n+1} < x_n$.

c) Etablir à l'aide de la question 2 l'inégalité: $0 < \exp(x_n) \leq -\dfrac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

d) On se propose d'établir enfin que la suite (x_n) diverge vers $-\infty$. A cet effet, on raisonne par l'absurde et l'on suppose que la suite (x_n) est minorée. Etablir:

- que la suite (x_n) converge vers une limite réelle $L < 0$ (on citera clairement le théorème utilisé).
- que pour tout nombre entier naturel n, $-\dfrac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq -\dfrac{L^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- que le nombre expL est nul (on étudiera d'abord la limite de la suite $k \to L^k/k!$). Conclure.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail